MA2115 Matemáticas IV (semi-presencial)
Práctica 09

Boris Iskra
María Neida Barreto

1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

Ejemplo 1.1

Halle las soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$$

Consideramos la ecuación:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) \text{ cuyas raices son } \lambda = 1, 3.$$

La solución de la parte homogenea es:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Ejemplo 1.1 (Continuación $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$)

Buscamos un solución particular de la forma:

$$y_p = Ce^{2x}.$$

Derivando tenemos

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ce^{2x} \\ y_p'' &= 4Ce^{2x} \end{aligned}$$

y sustituyendo en el sistema

$$\begin{aligned} 4Ce^{2x} - 4\left(2Ce^{2x}\right) + 3\left(Ce^{2x}\right) &= e^{2x} \\ -Ce^{2x} &= e^{2x}. \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $C = -1$ y la solución general es:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x}.}$$

Ejemplo 1.2

Halle las soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$$

Consideramos la ecuación:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

cuyas raices son $\lambda = 2, 3$.
La solución de la parte homogenea es:

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Ejemplo 1.2 (Continuación $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$)

Las raices del polinomio caracteristico son: $2, 3$ *y la solución de la parte homogenea es:*

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p = Axe^{3x} + Be^{3x}.$$

Derivando tenemos

$$\begin{aligned} y_p' &= 3Axe^{3x} + Ae^{3x} + 3Be^{3x} \\ &= 3Axe^{3x} + (A + 3B)e^{3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= 9Axe^{3x} + 3Ae^{3x} + (3A + 9B)e^{3x} \\ &= 9Ax^2 e^{3x} + (6A + 9B)e^{3x} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2 (Continuación $y''-5y'+6y=e^{3x}$)

Buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p = Axe^{3x} + Be^{3x}.$$

y sustituyendo en el sistema

$$\begin{aligned} y''-5y'+6y &= 9Axe^{3x} + (6A+9B)e^{3x} + \\ &\quad -5\left(3Axe^{3x} + (A+3B)e^{3x}\right) + \\ &\quad 6\left(Axe^{3x} + Be^{3x}\right) \\ &= Ae^{3x} = e^{3x}. \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $A=1$ y la solución general es:

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + xe^{3x}.}$$

Ejemplo 1.3

Halle la solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 1 \text{ con } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

Consideramos la ecuación:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

cuyas raices son $\lambda = 3$ *(con multiplicidad* 2*).*
La solución de la parte homogenea es:

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Ejemplo 1.3 (Continuación $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 1$ con $y(0) = 1, y'(0) = 2$)

La solución de la parte homogenea es:

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Buscamos un solución particular de la forma:

$$y_p = Ax^2 e^{3x} + Bxe^{3x} + Ce^{3x} + D.$$

Derivando tenemos

$$\begin{aligned} y_p' &= 3Ax^2e^{3x} + 2Axe^{3x} + 3Bxe^{3x} + Be^{3x} + 3Ce^{3x} \\ &= 3Ax^2e^{3x} + (2A + 3B)xe^{3x} + (B + 3C)e^{3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= 9Ax^2e^{3x} + 6Axe^{3x} + (2A + 3B)e^{3x} + \\ &\quad (6A + 9B)xe^{3x} + (3B + 9C)e^{3x} \\ &= 9Ax^2e^{3x} + (12A + 9B)xe^{3x} + (2A + 6B + 9C)e^{3x} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3 (Continuación $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 1$ con $y(0) = 1, y'(0) = 2$)

y sustituyendo en el sistema

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 9y &= 9Ax^2e^{3x} + (12A + 9B)xe^{3x} + (2A + 6B + 9C)e^{3x} + \\ &\quad -6\left(3Ax^2e^{3x} + (2A + 3B)xe^{3x} + (B + 3C)e^{3x}\right) + \\ &\quad 9\left(Ax^2e^{3x} + Bxe^{3x} + Ce^{3x} + D\right) \\ &= 2Ae^{3x} + 9D = e^{3x} + 1. \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $A = \dfrac{1}{2}, D = \dfrac{1}{9}$ *y la solución general es:*

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x} + \frac{1}{9}.$$

$$y' = 3C_1e^{3x} + 3C_2xe^{3x} + C_2e^{3x} + xe^{3x} + \frac{3}{2}x^2e^{3x}.$$

Ejemplo 1.3 (Continuación)

La solución general es:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 e^{3x} + \frac{1}{9}.$$

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x} + C_2 e^{3x} + x e^{3x} + \frac{3}{2} x^2 e^{3x}.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 2$

$$1 = C_1 + \frac{1}{9}.$$

$$2 = 3C_1 + C_2.$$

De donde se obtiene que $C_1 = \dfrac{8}{9}, C_2 = -\dfrac{2}{3}$ *y la solución es:*

$$\boxed{y = \frac{8}{9} e^{3x} - \frac{2}{3} x e^{3x} + \tfrac{1}{2} x^2 e^{3x} + \frac{1}{9}.}$$

Ejemplo 1.4

Halle la solución de la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 4y''' + 6y'' = 0$$

Consideramos la ecuación:

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 4\lambda + 6)$$

cuyas raices son $\lambda = 0, 0, 2 \pm i\sqrt{2}$. *La solución es:*

$$\boxed{y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} \cos(\sqrt{2}x) + C_4 e^{2x}\, sen(\sqrt{2}x).}$$

Ejemplo 1.5

Halle la solución de la ecuación diferencial

$$y^{(4)} + 4y''' + 13y'' = x$$

Consideramos la ecuación:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 13\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 4\lambda + 13) \text{ cuyas raices son } \lambda = 0, 0, -2 \pm 3i.$$

La solución de la parte homogenea es:

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} \cos(3x) + C_4 e^{-2x} sen(3x).$$

Buscamos un solución particular de la forma:

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Ejemplo 1.5 (Continuación $y^{(4)}+4y'''+13y''=x$)

Buscamos un solución particular de la forma:

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Derivando tenemos

$$\begin{array}{rclrcl} y_p' &=& 3Ax^2+2Bx+C & y_p'' &=& 6Ax+2B \\ y_p''' &=& 6A & y_p^{(4)} &=& 0 \end{array}$$

y sustituyendo en el sistema

$$y^{(4)}+4y'''+13y'' = 4(6A)+13(6Ax+2B) = x.$$

De donde se obtiene que $A=\dfrac{1}{78}, B=-\dfrac{2}{13}$ *y la solución general es:*

$$\boxed{y = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x}\cos(3x) + C_4e^{-2x}\,sen(3x) + \frac{1}{78}x^3 - \frac{2}{13}x^2}$$

Ejemplo 1.6

Halle la solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 7xy' + 10y = \ln(x) \text{ con } x > 0.$$

Consideramos el cambio de variables:

$$x = e^t \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = e^t = x, \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = e^t y' = x\, y'$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^t \frac{dy}{dx}\right) = e^t \frac{dy}{dx} + e^t \frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}$$

$$= x\, y' + e^t \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt} = x\, y' + x\, y''\, x = x\, y' + x^2\, y''$$

Ejemplo 1.6 (Continuación $x^2y'' + 7xy' + 10y = \ln(x)$)

Resumiendo:

$$\frac{dy}{dt} = x\,y' \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = x\,y' + x^2\,y''$$

y sustituyendo en el sistema

$$\begin{aligned} \left(x^2y'' + xy'\right) + 6xy' + 10y &= \ln(x) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 10y &= t \quad (x = e^t) \end{aligned}$$

Consideramos la ecuación:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 \text{ cuyas raices son } \lambda = -3 \pm i.$$

La solución de la parte homogenea es:

$$y_h = C_1 e^{-3t}\cos(t) + C_2 e^{-3t}\,sen(t).$$

Ejemplo 1.6 (Continuación $\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+10y=t$)

Buscamos un solución particular de la forma:

$$y_p = At + B.$$

Derivando tenemos

$$y_p' = A \qquad y_p'' = 0$$

y sustituyendo en el sistema

$$\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+10y = 6A+10(At+B) = t.$$

De donde se obtiene que $A=\frac{1}{10}, B=-\frac{3}{50}$ *y la solución general es:*

$$y = C_1e^{-3t}\cos(t)+C_2e^{-3t}sen(t)+\frac{1}{10}t-\frac{3}{50}.$$

(recordando que $x=e^t$)

$$\boxed{y = \frac{C_1\cos(\ln(x))}{x^3}+\frac{C_2\,sen(\ln(x))}{x^3}+\frac{\ln(x)}{10}-\frac{3}{50}.}$$

Ejemplo 1.7

Halle la solución de la ecuación diferencial

$$x^3y''' = 2xy' \text{ con } x \in (0,\infty).$$

Consideramos el cambio de variables:

$$z = y' \qquad z' = y'' \qquad z'' = y'''.$$

Obtenemos la ecuación diferencial

$$x^2z'' = 2z \text{ con } x \in (0,\infty).$$

Consideramos el cambio de variables:

$$x = e^t \qquad \frac{dz}{dt} = x\,z' \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = x\,z' + x^2\,z''$$

$$(x^2\,z'' + x\,z') - x\,z' - 2z = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} - 2z = 0$$

Ejemplo 1.7 (Continuación $\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} - 2z = 0$)

Consideramos la ecuación:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 \text{ cuyas raices son } \lambda = -1, 2.$$

La solución es:

$$z = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \qquad (x = e^t)$$

$$y' = z = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2$$

$$\boxed{y = A_1 \ln(x) + A_2 x^3 + A_3}$$

Ejemplo 1.8

Halle la solución de la ecuación diferencial

$$(x+1)^2y''+3(x+1)y'+y=0 \text{ con } x\in(-1,\infty).$$

Consideramos el cambio de variables: $x+1=u$ *de donde* $du=dx$
y obtenemos la ecuación diferencial

$$u^2y''+3uy'+y=0 \text{ con } u>0.$$

Consideramos el cambio de variables: $u=e^t$

$$y'=\frac{dy}{du}$$

$$\frac{dy}{dt}=u\,y'$$

$$\frac{d^2y}{dt}=u\,y'+u^2\,y''$$

Ejemplo 1.8 (Continuación $u^2y''+3uy'+y=0$)

Resumiendo:

$$\frac{dy}{dt}=u\,y' \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=u\,y'+u^2\,y''$$

y sustituyendo en el sistema

$$\begin{aligned}\left(u^2y''+uy'\right)+2uy'+y &= 0\\ \frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y &= 0 \quad \left(x+1=u=e^t\right)\end{aligned}$$

Consideramos la ecuación:

$$\lambda^2+2\lambda+1 \text{ cuyas raices son } \lambda=-1 \text{ (multiplicidad 2).}$$

La solución es:

$$y=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}.$$

$$\boxed{y=\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2\ln(x+1)}{x+1} \text{ para } x\in(-1,\infty).}$$

FIN